easyPOLI

Gruppi notevoli

Esempi di gruppi

www.easypoli.it
facebook.com/easypoli
contatti@easypoli.it

I sottogruppi abeliani del TRIRETTANGOLO sono:
→ i banali
→ $\{id, b\}, \{id, a\}, \{id, c\}$

Teorema: di LAGRANGE (per gruppi)

Sia $(A, *)$ un gruppo e sia $(B, *)$ un sottogruppo di $(A, *)$

Allora $\boxed{|B| \,/\, |A|}$ (nel caso in cui A sia finito)

cardinalità

COROLLARIO: Sia $(A, *)$ gruppo e $|A|$ primo, allora $(A, *)$ ha solo i sottogruppi banali

Es: $(\mathbb{Z}_{11}, +)$

Esempi di gruppi

① Gruppi di classi di resto

$\equiv_n \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ $\qquad x \equiv_m y$ sse m divide $x - y$

equivalenza ovvero x e y danno lo stesso resto quando divisi per m

$\mathbb{Z}/\equiv m = \mathbb{Z}_m = \{[0]_m, [1]_m, \dots, [m-1]_m\}$

Definisco su $\mathbb{Z}_m$ l'operazione di somma tra classi

$[a]_m + [b]_m = [a+b]_m$

$[5]_7 + [4]_7 = [9]_7 = [2]_7$

$-[5]_7 = [-5]_7 = [2]_7$

$\hookrightarrow -5 = (-1) \cdot 7 + 2$

$\forall m \in \mathbb{N}$, $(\mathbb{Z}_m, +)$ è un gruppo abeliano

OSS: $\mathbb{Z}_1 = \{[0]_1\}$ è un gruppo con 1 solo elemento poco interessante.

$(\mathbb{Z}_2, +) \Rightarrow$

$+$	$[0]_2$	$[1]_2$
$[0]_2$	$[0]_2$	$[1]_2$
$[1]_2$	$[1]_2$	$[0]_2$

posso leggerlo come
PARI + PARI ⇒ PARI
PARI + DISPARI ⇒ DISPARI
DIS + DISP ⇒ PARI

$(\mathbb{Z}, \cdot) \Rightarrow$

$\cdot$	$[0]_2$	$[1]_2$
$[0]_2$	$[0]_2$	$[0]_2$
$[1]_2$	$[0]_2$	$[1]_2$

non è un gruppo perché non ho elem. neutro su ogni riga

Considero solo gli elementi invertibili

Es: $\mathbb{Z}_{12}$. Vedi pagine indietro

$$\boxed{|E_{12}| = \varphi(m)}$$

funzione di Eulero

$\varphi(m)$ è il numero di numeri primi con m compresi tra 1 e $m-1$

Se p è primo $\varphi(p) = p-1$

Se p, q primi diversi $\varphi(p \cdot q) = \varphi(p) \cdot \varphi(q)$

② Gruppi di trasformazioni geometriche

→ Gr. triettangolo

→ Consideriamo un TRIANGOLO equilatero

Ogni permutazione dei vertici dà origine ad un Δ rettangolo

$$D_3 = \left\{ id: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, r_1: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, r_2: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, s_1: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, s_2: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, s_3: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \right\}$$

	id	r_1	r_2	s_1	s_2	s_3
id	id	r_1	r_2	s_1	s_2	s_3
r_1	r_1	r_2	id	s_2		
r_2	r_2	id	r_1	s_3		
s_1	s_1	s_3	s_2	id	r_2	r_1
s_2	s_2			r_1	id	r_2
s_3	s_3			r_2	r_1	id

Non è commutativo!

$$r_1 \cdot s_1 \rightarrow \begin{array}{l} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} r_1 \\ \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} s_1 \end{array}$$

$$s_1 \cdot s_2 \rightarrow \begin{array}{l} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} s_1 \\ \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} s_2 \end{array}$$

$$s_1 \cdot r_1 \rightarrow \begin{array}{l} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} s_1 \\ \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} s_1 \end{array}$$

$(D_3, \cdot)$ gruppo DIEDRALE di ordine 3

$|D_3| = 6$

$\{id, r_1, r_2\} \subseteq D_3$ anzi meglio...

$\{id, r_1, r_2\} \leq_{\cdot} D_3$

sottogruppo delle rotazioni

OSS: Dentro un gruppo non-commutativo è presente un sottogruppo commutativo.

$\{id, s_1\} \leq \cdot\ D_3$

$\{id, s_2\} \leq \cdot\ D_3$

$\{id, s_3\} \leq \cdot\ D_3$

OSS: Gruppi con meno di 6 elementi sono TUTTI commutativi.

→ Quadrato

$(D_4, \circ) \quad |D_4| = 8$ — 4 rotazioni, 4 simmetrie

Non commutativo → GRUPPO DIEDRALE

③ Gruppi di permutazioni

Sia $|X| = n$ chiamo $S_n: \{ f: X \to X \mid f \text{ biezione} \}$

$(S_n, \circ)$ è un gruppo.

Si chiama gruppo simmetrico su n elementi

$|S_n| = n!$ Se $n > 3$ $(S_n, \circ)$ non è commutativo

OSS: $n=1$ $(S_1, \circ) = (\{id\}, \circ)$

$n=2$ $(S_2, \circ) = (\{id, s: \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\})$

$\circ$	id	s
id	id	s
s	s	id

$\approx$

+	0	1
0	0	1
1	1	0

$(S_2, \circ) \approx (\mathbb{Z}_2, +)$

(è isomorfo $(\cong)$

$n=3$ $(S_3, \circ) = D_3$

$n=4$ $S_4 \neq D_4$

$|S_4| = 24 \quad |D_4| = 8$

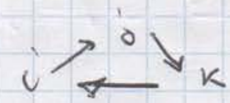
Teorema di Cayley: Ogni gruppo è isomorfo ad un sottogruppo di un gruppo simmetrico

④ Gruppo dei quaternioni

$Q_8 = \{ \underset{1}{id}, \underset{-1}{-id}, i, j, k, -i, -j, -k \}$

$i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $(-1)^2 = 1$

Regole del gioco.



$i \cdot j \to k$ $j \cdot k \to i$ $k \cdot i \to j$

$-i \cdot (-k) \to -j$ ... ...

	1	-1	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
1	1	-1	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
-1	-1	1	$-i$	i	$-j$	j	$-k$	k
i	i	$-i$	-1	1	k	$-k$	j	$-j$
$-i$	$-i$	i	1	-1	$-k$	k	$-j$	j
j	j	$-j$	$-k$	k	-1	1	i	$-i$
$-j$	$-j$	j	k	$-k$	1	-1	$-i$	i
k	k	$-k$	j	$-j$	$-i$	i	-1	1
$-k$	$-k$	k	$-j$	j	i	$-i$	1	-1

OSS: $\mathbb{C} = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ $\quad i^2 = -1$

$$\mathbb{H} = \{a + ib + jc + kd \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$$

i, j, k come in Q_8

Prodotto diretto

Def: $(A, *)$, $(B, \circ)$ gruppi:

Posso definire un'operazione $\square$ su $A \times B$:

$(a, b), (a', b') \in A \times B$

$$\Rightarrow (a, b) \,\square\, (a', b') = (a * a', b \circ b')$$

Allora $(A \times B, \square)$ è un gruppo detto prodotto diretto (esterno) di $(A, *)$ con $(B, \circ)$